Pozitivni redovi. Ostali kriterijumi konvergencije

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Cauchyev kriterijum

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitivan red. Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in (0, 1)$ tako da je

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

za svako $n \geq m$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentan. Ako je

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

za svako $n \geq m$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Umjesto prethodne teoreme u praksi se, pod istim imenom, češće koristi njena posljedica.

Cauchyev kriterijum

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitivan red i neka je

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}. \tag{1}$$

Ako je $L < 1$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira. Ako je $L > 1$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

D'alambertov kriterijum

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitivan red sa $a_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in (0,1)$ tako da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

za svako $n \geq m$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentan. Ako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

za svako $n \geq m$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

Kao i kod Cauchyevog kriterijuma, jednostavnija za primjenu je sledeća posljedica:

D'alambertov kriterijum

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pozitivan red sa $a_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$ i neka je

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{2}$$

Ako je $L < 1$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira. Ako je $L > 1$, red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira.

- Ovim teoremama nije obuhvaćen slučaj $L = 1$.
- Razlog je u činjenici da za $L = 1$ red može da bude konvergentan, ali i divergentan.
- Na primer, kod harmonijskog reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

  a pokazali smo da je taj red divergentan.
- Istovremeno, hiperharmonijski red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ je konvergentan, a takodje važi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

- Cauchyev kriterijum je precizniji od D’Alambertovog jer iz (2) sledi (1), dok obrnuto ne mora da važi.
- Tačnije, postoje slučajevi u kojima pomoću D?Alambertovog ne može, a pomoću Cauchyevog kriterijuma može da se utvrdi konvergencija (divergencija) reda.

Primjer 1: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k+1)}.$$

Za

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}$$

formiramo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n+1)}} = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n+1)} = \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{(n+1)}$$

i nalazimo graničnu vrijednost

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{(n+1)}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right]^{-2} = e^{-2} < 1,$$

pa prema Cauchyevom kriterijumu dati red konvergira. $\boxdot$

Primjer 2: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{\left(c + \frac{1}{k}\right)^k},$$

gdje je $c > 0$ proizvoljan realan broj. Za

$$a_n = \frac{n^3}{\left(c + \frac{1}{n}\right)^n}$$

nalazimo

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{\left(c + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{c + \frac{1}{n}}.$$

Kako odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{n}}$?
Neka je $f(x) = x^{\frac{3}{x}}$. Tada je $\ln f = \frac{3}{x}\ln x$, pa je redom

$$\lim_{x\to\infty}(\ln f) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\ln x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3\ln x}{x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\frac{1}{x}}{1} = 0,$$

$$\ln(\lim_{x\to\infty}(f)) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{x}} = e^0 = 1.$$

Tada je

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{c}.$$

Primjenom Cauchyevog kriterijuma zaključujemo sljedeće:

- Za $c < 1$ je $L > 1$, pa posmatrani red divergira.
- Za $c > 1$ je $L < 1$, pa red konvergira.
- Za $c = 1$ je $L = 1$, pa se ne zna na osnovu ovog kriterijuma da li red konvergira ili divergira. Medjutim, za $c = 1$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \infty \neq 0,$$

pa red divergira. $\boxdot$

Primjer 3: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}.$$

Za

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

formiramo količnik

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2}{n+1} \to 0, \text{ za } n \to \infty.$$

Dakle, $L = 0 < 1$, pa prema D'Alambertovom kriterijumu dati red konvergira. $\boxdot$

Primjer 4: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k + 1},$$

gdje je $c > 0$ proizvoljan realni broj. Za

$$a_n = \frac{1}{c^n + 1}$$

formiramo količnik

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{c^{n+1}+1}}{\frac{1}{c^n+1}} = \frac{c^n + 1}{c^{n+1} + 1} = \frac{1 + \frac{1}{c^n}}{c + \frac{1}{c^n}}$$

i nalazimo graničnu vrijednost. Za $c \leq 1$ imamo

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^n + 1}{c^{n+1} + 1} = 1,$$

a za $c > 1$ imamo

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{c^n}}{c+\frac{1}{c^n}} = \frac{1}{c} < 1.$$

Primenom D'Alambertovog kriterijuma zaključujemo sljedeće:

- Za $c > 1$ je $L < 1$, pa posmatrani red konvergira.
- Za $c \leq 1$ je $L = 1$, pa se ne zna da li red konvergira ili divergira. Medjutim, za $c < 1$ i $c = 1$ je redom:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n+1} = 1 \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

pa red divergira. $\boxdot$